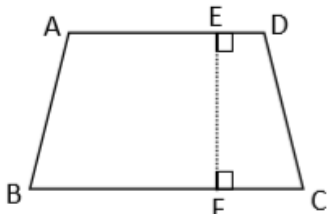
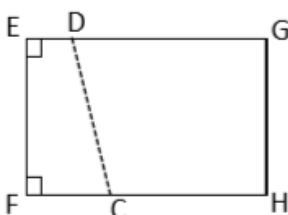


# 新北市 108 學年度國小數學檢測非選擇題學生解題分析及教學建議報告

## 一、試題內容及評閱規準：

分年細目	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。		知識向度	幾何
評量內涵	能理解梯形面積之底和高的關係		認知層次	解題思考
試題內容	<p>桌上有一張面積為 60 平方公分的等腰梯形紙張 ABCD(如圖一)。小明將這張紙沿著線段 EF 剪開變成 ABFE 及 EFCD 兩個梯形，並將梯形 ABFE 翻轉移動後重新拼成一個長方形 EFHG(如圖二)。</p> <div style="text-align: center;">   </div> <p style="text-align: center;">圖一                      圖二</p> <p>已知梯形 ABCD 中，線段 EF 長 6 公分，線段 AD 長 8 公分，請問長方形 EFHG 的周長是幾公分？請說明你的做法。</p> <p>作答欄：</p> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？          (2) 我的做法：</p>			
評閱類別及規準	類別	評閱規準	評閱說明	
	2A	用長方形面積等於梯形面積正確算出長方形的周長	因為長方形面積=梯形面積=60 平方公分 所以 $60 \div 6 = 10$ 長方形的周長 = $(10 + 6) \times 2 = 32$ (公分)	
	2B	用梯形面積推論出梯形上下底之和為長方形兩長之和，正確算出長方形的周長	梯形面積=60 平方公分 因為梯形面積 = $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ $60 \times 2 \div 6 = 20$ ，就是梯形的上底及下底和為 20 公分 所以長方形的兩個長合起來等於 20 公分 長方形的周長 = $20 + 6 \times 2 = 32$ (公分)	
	2C	用梯形面積推論出梯形的上下底長度，再利用重組圖形關係找出長方形的長，正確算出長方形的周長	梯形面積=60 平方公分 因為梯形面積 = $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ $60 \times 2 \div 6 = 20$ ，又梯形的上底為 8 公分 梯形的下底為 $20 - 8 = 12$ (公分) 所以長方形的長 $(8 + 12) \div 2 = 10$ (公分) 長方形的周長 = $(10 + 6) \times 2 = 32$ (公分)	

	2X	答題正確，但不屬於上述AB 類型	
	1A	能用長方形面積等於梯形面積算出長方形的長為 10 公分，但計算周長錯誤	因為長方形面積=梯形面積=60 平方公分 所以 $60 \div 6 = 10$ $10 + 6 = 16$ (公分)或 $10 \times 6 = 60$ (公分)
	1B	能用梯形面積推論出梯形上下底之和，但無法計算長方形周長	梯形面積=60 平方公分 因為梯形面積=(上底+下底) $\times$ 高 $\div 2$ $60 \times 2 \div 6 = 20$
	1C	能用梯形面積推論出梯形的上下底之長，但將梯形下底長視為長方形的長，而計算長方形周長錯誤	梯形面積=60 平方公分 因為梯形面積=(上底+下底) $\times$ 高 $\div 2$ $60 \times 2 \div 6 = 20$ ， $20 - 8 = 12$ (公分) $(12 + 6) \times 2 = 36$
	1X	答題正確，但不屬於上述ABC 類型	
	0A	將梯形的高和上底視為長方形的長和寬進行周長計算	$(6 + 8) \times 2 = 28$
	0B	將梯形的高和上底視為長方形的長和寬，並運用面積公式進行周長計算	$6 \times 8 = 48$
	0C	將梯形的高和上底視為長方形的長和寬，並混淆錯誤的周長及面積公式進行周長計算	$6 + 8 = 14$
			$8 \times 6 \times 2 = 96$
	0X	其他錯誤類型，但不屬於上述 ABCD 類型	
	99	空白	

## 二、評閱結果：

### (一)本題學生作答情形

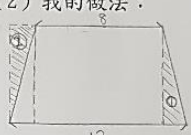
類型	2				1				0					合計
	2A	2B	2C	2X	1A	1B	1C	1X	0A	0B	0C	0X	99	477 人
人數	29	17	12	3	2	0	18	19	140	29	15	136	57	
百分比(%)	6.1	3.6	2.5	0.6	0.4	0.0	3.8	4.0	29.4	6.1	3.1	28.5	12.0	
人數	61				39				377					
百分比(%)	12.8				8.2				79.0					

依上表可看出 2 分類型的學生只有一成多，1 分類型的學生不到一成，而 0 分類型的學生高達近八成。2 分類型的學生佔 12.8%，其中近半數是屬於 2A 類型的，也就是能在切割重組的情境下理解異形等積，利用長方形面積等於梯形面積推算出長方形的周長；其他 2B 及 2C 類型，都是先算出梯形的上下底長，再算出長方形的長，進而計算出長方形的周長。1 分類型的學生佔 8.2%，大部分為 1C 類型，這類學生能推論出梯形的上下底長，但是未觀察兩個圖形間長度變化的關係，誤將梯形下底視為長方形的長而解題錯誤。

至於 0 分類型的學生佔 79%，其中有近四成的學生屬於 0A 類型，直接將題目給的兩個長度數當作長方形的長和寬計算周長；其中 0B 及 0C 類型的學生有一成多，同樣也是直接將題目給的兩個長度數當作長方形的長和寬計算周長，再加上運用公式錯誤或混淆，可見這類學生無論在幾何或量的概念上都是混淆不清的。

## (二) 學生答題類型分析

類型	學生作答舉隅(照片)	作答舉隅分析
2A	<p>作答欄：</p> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？ 32 cm</p> <p>(2) 我的做法：兩個圖形的面積依舊一樣，只是形狀變不一樣，假設這樣，那麼 <math>60 \text{ cm}^2 = 6 \times 10</math> 周長 <math>= (10 \times 2) + (6 \times 2) = 32</math></p> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？ A: 32 公分</p> <p>(2) 我的做法：  <math>ABCD = EFHG</math>  <math>60 \div 6 = 10</math>  <math>(10 \times 2) + (6 \times 2)</math>  <math>= 20 + 12</math>  <math>= 32</math> </p>	知道長方形面積和梯形面積相同，利用梯形面積 60 平方公分算出長方形的長為 10 公分，再正確算出長方形的周長
2B	<p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？ 32 cm</p> <p>(2) 我的做法：  <math>6 \times 2 = 12</math>  <math>120 \div 6 = 20</math>  <math>20 - 8 = 12</math>  <math>12 + 20 = 32</math> </p> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？ 32 cm</p> <p>(2) 我的做法：  <math>60 \times 2 = 120</math>  <math>120 \div 6 = 20</math>  <math>6 \times 2 = 12</math>  <math>20 + 12 = 32</math>          先算出梯形的上下底之和等於長方形的長，EF 是 6 cm，<math>6 \times 2</math> 再加上 20 就是長方形的周長。       </p>	先用梯形面積推論出梯形上下底之和為 20 公分，知道梯形的上底加下底與長方形的兩個長等長，直接用 20 公分加上長方形的兩個寬，正確算出長方形的周長
2C	<p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？ 32 cm</p> <p>(2) 我的做法：  <math>60 \times 2 = 120</math>  <math>120 \div 6 = 20</math>  <math>20 - 8 = 12</math>  <math>(12 + 8) \times 2 = 40</math> </p>	先用梯形面積推論出梯形下底長 12 公分，利用梯形的上底加下底與長方形的兩個長等長，先算出長方形的長為 10 公分，再正確算出長方形的周長

2X	<div data-bbox="225 174 1066 398"> <p>長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>A = 32\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p> <math display="block">8 \times 6 = 48</math> <math display="block">60 - 48 = 12</math> <math display="block">12 \div 6 = 2</math> <math display="block">8 + 2 = 10</math> <math display="block">10 \times 2 + 6 \times 2 = 32</math> </div>	<p>將梯形想像切割成中間長方形，左右各一個三角形。先算出中間長方形的面積 48 平方公分，得知兩側三角形的面積和 12 平方公分，再算出一側三角形的底長為 2 公分，再正確推論出長方形的周長</p>
	<div data-bbox="225 510 1066 745"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>32\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p> <math display="block">(8+x) \times 6 \div 2 = 60</math> <math display="block">x = 60 \times 2 \div 6 - 8</math> <math display="block">= 12</math> <math display="block">8 + 12 + 6 + 6 = 32</math> </div>	<p>假設下底為未知數 X 列出等式，利用乘除及加減互逆找出 X 為 12 公分，再利用上下底加上兩個高的總長正確計算出長方形的周長</p>
1A	(略)	(略)
1B	(略)	(略)
1C	<div data-bbox="225 981 1066 1193"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>A = 36\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p> <math display="block">(8+x) \times 6 \div 2 = 60</math> <math display="block">= (8+x) \times 3 = 60</math> <math display="block">= (8+x) = 20</math> <math display="block">= 20 - 8 = 12</math> <math display="block">6 + 6 = 12</math> <math display="block">12 + 12 = 24</math> <math display="block">12 \div 2 = 6</math> <math display="block">= 36</math> </div> <div data-bbox="225 1216 1066 1429"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>36\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p> <math display="block">(8+?) \times 6 \div 2 = 60</math> <math display="block">(8+?) \times 3 = 60</math> <math display="block">8 + ? = 20</math> <math display="block">? = 20 - 8</math> <math display="block">? = 12</math> <math display="block">(12+6) \times 2 = 18 \times 2 = 36</math> </div> <div data-bbox="225 1451 1066 1865"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>12 - 8 = 4</math>  <math>8 + 4 = 12</math>  <math>12 + 12 + 6 + 6 = 36</math>  <math>A = 36\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p>  <p>把塗黑的三角形移到②的位置，就會形成和圖二一樣的圖形。</p> <p><math>12 - 8 = 4</math> 4 等於塗黑三角形的底長。</p> <p><math>8 + 4 = 12</math> 12 等於長方形的寬。</p> <p><math>12 + 12 + 6 + 6 = 36</math> 36 等於長方形周長。</p> </div>	<p>先用梯形面積推論出梯形下底長 12 公分，接著將 12 公分視為長方形的長，算出錯誤的長方形周長</p>
1X	<div data-bbox="225 1888 1066 2107"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <p><math>32\text{cm}</math></p> <p>(2) 我的做法：</p> <p>先用面積將 BC 求出，再假想 EFCD 移至 AB 那，(兩翻轉)，這樣就是 EFGH 了，但雖然翻轉了，長度都沒變，所以只需算出周長就好了。</p> </div>	<p>答案正確，但理由不完整 (部分使用計算的數字，無法得知該數字如何出現，未說明清楚)</p>

	<div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>32\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  <math>6 \times 2 + 2 + 8 + 4 + 6</math>  <math>= 12 + 2 + 8 + 4 + 6</math>  <math>= 32</math> </div> </div> <div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>A: 32\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  A: 先把梯形算出來, 是 <math>12\text{cm}</math>, 再把 EDFC 省略, 再把上底和下底差的地方畫線, 成了一個邊長 <math>6\text{cm}</math> 的正方形, 再算出 ED 和 FC 的長, 就能算出答案。 </div> </div>	
0A	<div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>28\text{公分}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  把 EF 的長先乘 2 再把 AD 的長和, 因為 AD 的長跟 FH 和 EG 的長一樣。 </div> </div> <div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>28\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  <math>6 \times 2 + 8 \times 2 = 28</math> </div> </div>	<p>直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬, 使用長方形的周長公式計算周長:</p> $(6+8) \times 2 = 28$
0B	<div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>48\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  <math>8 \times 6 = 48</math> </div> </div> <div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>8 \times 6 = 48</math>  <math>A: 48\text{公分}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  把 ABCD 的上底和高找出來高就是 EFHG 的長, 就是 EFHG 的寬。 </div> </div> <div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>6 \times 8 = 48</math>  <math>A: 48\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  先把長 <math>\times</math> 高就知道答案了。 </div> </div>	<p>直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬, 使用長方形的面積公式計算周長:</p> $6 \times 8 = 48$
0C	<div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>6 \times 8 \times 2 = 96</math>  <math>A: 96\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  長 <math>\times</math> 寬 <math>\times 2</math> </div> </div> <div> <div> (1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分?  <math>A: 96\text{cm}</math> </div> <div> (2) 我的做法:  <math>(8 \times 6) \times 2</math>  <math>= 48 \times 2</math>  <math>= 96</math> </div> </div>	<p>直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬, 使用混淆的錯誤公式計算周長:</p> $8 \times 6 \times 2 = 96$



0X	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>(1) 長方形 EFHG 的周長是幾公分？</p> <math display="block">10 \times 10 \times 10 = 1000</math> <p>A: 1000cm</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>(2) 我的做法：</p> <math display="block">6 \div 6 = 10</math> <math display="block">10 \times 10 \times 10 = 1000</math> </div> </div>	各種錯誤概念解題(混淆各種公式)
----	---	------------------

## 1. 學生正確的多元解題策略

從學生的 2 分類型中，主要可區分為三種策略：

- (1) 直接用長方形面積等於梯形面積先算出長方形的長，再利用長方形的周長公式算出長方形的周長。
- (2) 利用梯形面積推論出上下底之和，再利用梯形上下底和與長方形的兩個長等長，用上下底和再加上兩寬算出長方形的周長。
- (3) 利用梯形面積推論出下底的長度，再利用梯形上下底和與長方形的兩個長等長，將梯形上下底和除以 2 算出長方形的長，最後利用長方形的周長公式算出長方形的周長。

2 分類型中近半數的學生都是第一種策略，這類學生是能利用面積的保留概念，在切割重組的情境下理解等積異形，並以其關係進行解題。另外半數學生則是運用長度保留的概念，在切割重組的情境下理解原梯形的上下底長總和與之後長方形的上下兩長總和相等，並以其關係進行解題。

## 2. 學生常見的錯誤解題想法

在學生的 1 分類型中並沒有多種錯誤想法，原本的評閱規準設想學生可能以面積保留或長度保留推論出長方形的長，但在計算長方形周長時可能產生錯誤，但在此次抽測學生作答中未有此類錯誤，而是顯示出能利用面積保留或長度保留概念解題的學生，都能正確找出長方形周長。1 分類型學生的典型錯誤在於：直接將梯形的下底視為長方形的長進行周長的計算，這類的學生明顯沒有長度的保留概念，即使周長公式使用正確但仍無法正確解題。

至於學生的 0 分類型中，幾乎所有典型的錯誤概念都是直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬，對於梯形切割重組後形成長方形之間的面積及邊長變化的關係完全無法掌握，也無法應用解題，只能從題目中提供的兩個數字放入周長公式解題。此類學生的錯誤主要可區分為三類：

- (1) 直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬，帶入長方形周長公式「 $(長+寬) \div 2$ 」解題；
- (2) 直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬，帶入長

方形面積公式「長×寬」解題。

- (3) 直接將題目提供的梯形的上底 8 公分和高 6 公分視為長方形的長和寬，帶入混淆面積和周長的公式(如：「長×寬×2」)解題。

其中絕大部分的錯誤類型為第一類，表示大部分學生仍熟悉周長公式，但是因為對於圖形切割重組前後之間的面積及邊長，無法掌握其變化關係思考解題。

### 三、評量內涵及本題的教學建議：

本題評量重點為了解學生是否能理解梯形面積之底和高的關係。本題之教學建議如下：

#### (一) 透過操作活動的動態過程，加強圖形切割重組前後各邊之間連結的關係

從學生的錯誤類型中，可以看出許多學生會直接將梯形的「上底和高」視為長方形的「長和寬」進行計算，可見學生在學習梯形面積時未有許多操作梯形面積的經驗。在現行教材中，課本對於梯形面積的處理以引入面積公式為主，大部分都是用兩個全等梯形組成平行四邊形來介紹梯形面積公式為「 $(上底+下底) \times 高 \div 2$ 」，對於梯形本身的多元切割方式並未多著墨。

其實梯形可以視為長方形與三角形、或平行四邊形與三角形的組合，切割成不同形狀後也可以重新組合形成新的形狀。這類的梯形操作經驗，有助於學生從不同角度下更深入的認識梯形的各種性質，透過重組時的動態過程也能提供學生更多機會觀察梯形切割重組成不同圖形前後各邊之間連結的關係，有助產生動態心象應用於解題思考。

#### (二) 強化圖形切割重組前後面積、邊長及高之間變與不變(保留概念)的關係

以本題為例，梯形從「高」處切割後旋轉重組為長方形，教師可以和學生討論原梯形和重組後的長方形在面積、邊長、周長與高如何變化?是不變或是有改變?為何不變或為何改變?這些問題都可以讓學生們討論，增加他們觀察並能簡單推理說明的經驗，一旦學生能掌握其中的變化關係，自然能應用於解題的條件思考上。